Proceedings of IAM, V.2, N.2, 2013, pp.147-153

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ*

Р.Т. Зульфугарова[1], М.М.Муталлимов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет
e-mail: mmutallimov@bsu.az

Резюме. Предлагается алгоритм для решения задачи оптимизации с неразделенными многоточечными краевыми условиями, который позволяет привести нахождение начальных данных к решению соответствующих линейных алгебраических уравнений с симметричной главной матрицей. Такой подход позволяет улучшить обусловленности системы для нахождения начальных данных и опирается к такой хорошо разработанной процедуре–решению дифференциальных матричных уравнений Риккати, линейных дифференциальных и алгебраических уравнений.

Ключевые слова: оптимальное управление, метод прогонки, многоточечные краевые условия.

AMS Subject Classification: 49J15, 49M25, 49N10.

1. Введение

Решения многих задач процессов управления [1], выбора программных траекторий и управления [2] сводится к двухточечным, трехточечным и многоточечным краевым задачам. Для решения задачи управления с двухточечными, трехточечными краевыми условиями в настоящее время имеются разные вычислительные алгоритмы, как алгоритмы, повышающие размерности исходной системы [3] и опирающиеся на решения соответствующих дифференциальных уравнений Гамильтона [4], так и алгоритмы, не повышающие размерности исходной задачи [5]. На примере построения программной траектории и управления двуногого шагающего аппарата (ША) [5], показано, что алгоритмы из [3] сталкиваются с определенными трудностями, которые связаны с тем, что плохо обусловленность матрицы Гамильтона сопровождает их алгоритм вплоть до решения соответствующих линейных алгебраических уравнений. Поэтому в [6,7,8] предложен метод прогонки для решения рассматриваемой задачи. Вопросы обусловленности этих задач подробно анализированы в [9,10].

В настоящей работе идея прогонки [5,6,7.8] модифицируется для решения задачи оптимального управления с многоточечными краевыми условиями.

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 15.10.2013.

2. Постановка задачи

Допустим, что рассматриваемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)U(t) + v(t)\ , \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

с многоточечными краевыми условиями

$$\sum_{i=0}^{p} \Phi_i x(t_i) = q\ , \tag{2}$$

где $0 = t_0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_{p-1} < t_p = T$.

Будем предполагать, что $F(t), G(t)$ - матрицы-функции размерности $n \times n$, $n \times m$ соответственно, $x(t)$ и $v(t)$ - n-мерный вектор-функция, $u(t)$ - управляющее воздействие размерности m, Φ_i $(i = \overline{0,n})$ постоянные матрицы размерности $k \times n$, а q - k-мерный постоянный вектор.

Требуется найти такое управление $u(t)$ и соответствующую траекторию $x(t)$ так, чтобы минимизировался функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)C(t)u(t)\right]dt \tag{3}$$

где симметричные матрицы $Q(t)$ и $C(t)$ имеют размерности $n \times n$, $m \times m$, соответственно.

Соответствующее уравнения Эйлера-Лагранжа будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = F(t)x(t) - M(t)\text{ª}(t) + v(t),\\
&\dot{\text{ª}}(t) = -Q(t)x(t) - F'(t)\text{ª}(t),\\
&\text{ª}(t_0) = \text{ª}(0) = -\Phi_0'\text{¥},\\
&\text{ª}(t_i + 0) = \text{ª}(t_i - 0) - \Phi_i'\text{¥}, \qquad i = \overline{1, p-1},\\
&\text{ª}(t_p) = \text{ª}(T) = \Phi_p'\text{¥},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $M(t) = -C^{-1}(t)\text{ª}'(t)G(t)$; а $\text{ª}(t)$, ¥ множители Лагранжа.

3. Метод прогонки

Суть предложенного метода состоит в том, что множитель Лагранжа $\text{ª}(t)$ представляется в виде

$$\text{ª}(t) = S(t)x(t) + N(t)\text{¥} + \mu(t), \qquad t \in [0,t], \tag{5}$$

где $S(t)$, $N(t)$ и $\mu(t)$ неизвестные функции. Подставляя выражение (5) в уравнение (4) после некоторых операций получим для определения $S(t)$, $N(t)$ и $\mu(t)$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{S}(t) = -F'(t)S(t) - S(t)F(t) + S(t)M(t)S(t) - Q(t),\\
&\dot{N}(t) = [S(t)M(t) - F'(t)]N(t),\\
&\dot{\mu}(t) = [S(t)M(t) - F'(t)]\mu(t) - S(t)\nu(t)..
\end{aligned} \tag{6}$$

Из условий $\psi(T) = \Phi_p' \lambda$ в (6) мы получим

$$S(t)x(T) + N(T)\lambda + \mu(T) = \Phi_p' \lambda .$$

И из-за произвольности функций $x(t)$ и лагранжевого множителя λ получим следующие начальные условия в точке $t = T$:

$$S(T) = 0,\ \ N(T) = \Phi_p',\ \mu(T) = 0 .$$

Теперь учитывая $t = t_0$ в (5) и условие $\psi(t_p) = -\Phi_0'$ в (4) получим

$$\psi(t_0) = S(t_0)x(t_0) + N(t_0)\lambda + \mu(t_0) = -\Phi_0' \lambda ,$$

или следующие уравнения для определения неизвестных $x(t_0)$ и λ :

$$S(t_0)x(t_0) + \left[N(t_0) + \Phi_0'\right]\lambda = -\mu(t_0) \tag{7}$$

Далее, из условия $\psi(t_i + 0) = \psi(t_i - 0) - \Phi_i' \lambda$ в (4), а также из равенств

$$\begin{aligned}
\psi(t_i + 0) &= S(t_i + 0)x(t_i) + N(t_i + 0)\lambda + \mu(t_i + 0),\\
\psi(t_i - 0) &= S(t_i - 0)x(t_i) + N(t_i - 0)\lambda + \mu(t_i - 0),
\end{aligned}$$

получаем

$$S(t_i+0)x(t_i)+N(t_i+0)\lambda+\mu(t_i+0)=S(t_i-0)x(t_i)+N(t_i-0)\lambda+\mu(t_i-0)-\Phi_i'\lambda .$$

Отсюда мы получим

$$\begin{aligned}
&S(t_i + 0) = S(t_i - 0)\\
&\mu(t_i + 0) = \mu(t_i - 0)\\
&N(t_i + 0) = N(t_i - 0) - \Phi_i' .
\end{aligned} \tag{8}$$

Эти равенства означают, что функции $S(t)$, $\mu(t)$ непрерывны в точках $t = t_i$, а функция $N(t)$ претерпевает разрыв в этих же значениях аргумента.

Теперь, как в двухточечном случае, можно показать, что при $t \in (t_{p-1}, t_p)$

$$\Phi_p x(T) = N'(t)x(t) + u(t)\lambda + W(t),$$

тогда при $t = t_{p-1}$ получим

$$\Phi_p x(T) = N'(t_{p-1}+0)x(t_{p-1}) + u(t_{p-1}+0)\nu + W(t_{p-1}+0).$$

Далее, поставив это выражение в (2), получим

$$\sum_{i=0}^{p-2}\Phi_i x(t_i) + \Phi_{p-1}x(t_{p-1}) + \Phi_p x(T) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1}\Phi_i x(t_i) + \Phi_{p-1}x(t_{p-1}) + N'(t_{p-1}+0)x(t_{p-1}) + n(t_{p-1}+0) + W(t_{p-1}+0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1}\Phi_i x(t_i) + \left[\Phi_{p-1} + N(t_{p-1}+0)\right]x(t_{p-1}) + n(t_{p-1}+0) + W(t_{p-1}+0) = q \ ,$$

отсюда получаем что,

$$\sum_{i=0}^{p-2}\Phi_i x(t_i) + \left[\Phi_{p-1} + N(t_{p-1}+0)\right]x(t_{p-1}) + n(t_{p-1}+0) + W(t_{p-1}+0) = q \,, \tag{9}$$

где $n(t)$, $W(t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot n(t) = N'(t)M(t)N(t), \\ &\dot W(t) = N'(t)[M(t)\mu(t) - v(t)]. \end{aligned} \tag{10}$$

На интервале (t_{p-1}, t_p) с начальными условиями $n(t_p) = 0,\ W(t_p) = 0$.

Если обозначим

$$\begin{aligned} &\Phi_i^{(1)} = \Phi_i,\ i = \overline{0, p-2}, \\ &\Phi_{p-1}^{(1)} = \Phi_{p-1} + N'(t_{p-1}+0), \\ &q^{(1)} = q - n(t_{p-1}+0)\nu + W(t_{p-1}+0), \end{aligned}$$

то получим

$$\sum_{i=0}^{p-1}\Phi_i^{(1)}x(t_i) = q^{(1)} \,. \tag{11}$$

Таким образом, в результате проведенных операций мы получим условие (11), где точка $\{t_i\}$ на единицу меньше, чем в граничном условии (2). Продолжая эту процедуру, мы после k таких операций получим

$$\sum_{i=0}^{p-k}\Phi_i^{(k)}x(t_i) = q^{(k)} \ . \tag{12}$$

Тогда согласно той же методике, что использовалось выше, мы будем иметь

$$\Phi_{p-k}^{(k)}x(t_{p-k}) = N'(t)x(t) + n(t)\nu + W(t). \tag{13}$$

Подставив (13) в (12), при $t = t_{p-k-1}$ получим после некоторых элементарных преобразований

$$\sum_{i=0}^{p-k-2}\Phi_i^{(k)}x(t_i)+\left[\Phi_{p-k-1}^{(k)}+N'(t_{p-k-1}+0)\right]x(t_{p-k-1})=q^{(k)}-n(t_{p-k-1}+0)\nu-W(t_{p-k-1}+0), \qquad (14)$$

где $n(t), W(t)$ решения уравнений (9) на интервале t_{p-k-1}, t_{p-k} с условием $n(t_{p-k})=0,\ W(t_{p-k})=0$.

Далее, обозначая

$$\begin{gathered}\Phi_i^{(k+1)}=\Phi_i^k,\ i=\overline{0,p-k-2}\\ \Phi_{p-k-1}^{(k+1)}=\Phi_{p-k-1}^k+N'(t_{p-k-1}+0)\\ q^{(k+1)}=q^{(k)}-n(t_{p-k-1}+0)\nu-W(t_{p-k-1}+0),\end{gathered} \qquad (15)$$

получим

$$\sum_{i=0}^{p-k-1}\Phi_i^{(k+1)}x(t_i)=q^{(k+1)}.$$

Если продолжить эту процедуру $p-1$ раз, получим

$$\Phi_0^{(p-1)}x(t_0)+\Phi_1^{(p-1)}x(t_1)=q^{(p-1)}. \qquad (16)$$

Наконец, применяя вышеизложенную методику еще раз, получим

$$\Phi_1^{(p-1)}x(t_1)=N'(t_0+0)x(t_0)+n(t_0+0)\nu+W(t_0+0). \qquad (17)$$

Здесь $n(t)$ и $W(t)$ решения уравнений (9) на интервале (t_0,t_1) с условиями $n(t_1)=0,\ W(t_1)=0$. Отсюда получим, что

$$\left[\Phi_0^{(p-1)}+N'(t_0+0)\right]x(t_1)+n(t_0+0)\nu=q^{(p-1)}-W(t_0+0). \qquad (18)$$

Далее, учитывая рекуррентное соотношение (15), мы из (18) получим необходимое для определения $x(t_0)$ и ν, уравнение

$$[\Phi_0+N'(t_0+0)]x(t_1)+\sum_{i=0}^{p-1}n(t_i+0)\nu=q-\sum_{i=0}^{p-1}W(t_i+0). \qquad (19)$$

Таким образом, для определения начального значения $x(t_0)$ и лагранжевого множителя ν получим систему алгебраических уравнений (7), (19), которую можно записать в следующей матричной форме

$$\begin{bmatrix} S(t_0) & N(t_0+0)+\Phi_0{}' \\ \Phi_0+N'(t_0+0) & \sum_{i=1}^{p-1}n(t_i+0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t_0)\\ \nu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mu(t_0)\\ q-\sum_{i=0}^{p-1}W(t_i+0)\end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Как видно, главная матрица системы (20) является симметричной.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (20), мы находим $x_0=x(0)$ и ν, затем управление $u(t)$ определяется

$$u(t) = C^{-1}(t)G'(t)(S(t)x(t) + N(t)\text{¥} + \mu(t)), \qquad (21)$$

а $x(t)$ как решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = (F(x) + M(t)S(t))x(t) + M(t)N(t)\text{¥} + M(t)\mu(t) + v(t), \qquad (22)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Необходимо отметить, коэффициенты для определения $x(t), u(t)$ из (21), (22) совпадают с коэффициентами соответствующей задачи оптимальной стабилизации. А это, в свою очередь, существенно снижает используемые ресурсы для решения общей задачи оптимального управления (построение программных траекторий и управления, оптимальная стабилизация около $x(t)$, $u(t)$).

Литература

1. Бордюг В.Л., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1985, 263 с.
2. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. Киев, Наук. думка, 1980, 168 с.
3. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, т.1, №3, с.542-545.
4. Bryson A., Xo-Yu-Shi. Applied optimal control optimization, estimation and control. London: Waltham, 1972, 412 p.
5. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Элм, 1989, 320 с.
6. Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А. Оптимизация импульсных систем с неразделенными двухточечными граничными условиями, Доклады АН СССР, 1985, т.280, № 4, с.796-798.
7. Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями, Дифференциальные уравнения, 1986, №2, с.345-347.
8. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями, Известия АН СССР, сер.техническая кибернетика, 1985, №6, с.138-146.
9. Ларин В.Б. О симметризации двухточечной краевой задачи, Проблемы управления и информатики, №3, 2002, с.30-37.
10. Aliev F.A., Larin V.B., Akin O., Dogan N., H.Sayan, N.A.Ismailov. On a symmetrization of the boundary value problem, Appl. Comput. Math., Vol.1, No.1, 2002, pp.69-79.

Çoxnöqtəli sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsi üçün qovma üsulu

R.T. Zülfüqarova, M.M. Mütəllimov

XÜLASƏ

İşdə çoxnöqtəli ayrılmayan sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün qovma üsulu tətbiq edilir ki, bu da başlanğıc şərtlərinin tapılmasını baş matrisi simmetrik olan uyğun xətti cəbri tənliklər sisteminə gətirilir.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, qovma üsulu, çoxnöqtəli sərhəd şərtləri.

Sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions

R.T. Zulfugarova, M.M. Mutallimov

ABSTRACT

The work for solution of the optimization problem with unrepeated multy-point boundary conditions the transfer method which allows to reduce the obtaining of initial conditions to solution of corresponding linear-algebraic equations with symmetric main matrix, is used.

Keywords: optimal control, sweep method, multy-point boundary conditions